

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЪЕМНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ

Аннотация. Рассмотрен численный метод коллокации для решения объемного сингулярного интегродифференциального уравнения на диэлектрическом теле, расположенном в прямоугольном волноводе. Также рассмотрена обратная задача определения эффективной диэлектрической проницаемости тела. Представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации. Представлены результаты численных расчетов для решения сингулярного интегродифференциального уравнения методом коллокации и численные результаты определения эффективной диэлектрической проницаемости тела в волноводе.

Ключевые слова: обратная электромагнитная краевая задача, интегродифференциальное уравнение, метод коллокации.

Abstract. Numerical collocation method for solving singular integro-differential equation on dielectric body located in rectangular waveguide is considered. Inverse electromagnetic boundary value problem for determination of effective permittivity of the body is also considered. The formulas of matrix coefficients for collocation method are presented. Numerical results for solution of singular integro-differential equation by collocation method as well as numerical results for determination of effective permittivity of the body in waveguide are presented.

Keywords: inverse electromagnetic boundary value problem, electromagnetic scattering, integro-differential equation, collocation method.

Определение диэлектрических и магнитных параметров нанокomпозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией является актуальной задачей нанотехнологии и наноэлектроники. Однако эти параметры, как правило, недоступны для экспериментального измерения (ввиду композиционного характера материалов и малых размеров образцов), что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачи численно с помощью компьютеров.

При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке. Решение таких задач является в настоящее время одной из самых актуальных проблем в электродинамике. Решение этих задач с приемлемой для практики точностью на электродинамическом уровне строгости математическими методами требует очень большого объема вычислений и часто невозможно даже на самых современных суперкомпьютерах. Особенно остро стоит проблема решения обратных электродинамических задач на сложной системе тел в резонансном диапазоне частот, возникающая при определении параметров нанокomпозитных материалов и наноструктур [1–3].

Таким образом, возникает необходимость разработки новых методов решения указанного круга задач. Одним из перспективных методов является метод объемных сингулярных интегральных уравнений [4–6]. Краевая задача сводится к решению нелинейного объемного сингулярного интегродиффе-

ренциального уравнения [6–8]. Здесь оператор задачи получается эллиптическим, а интегральное уравнение решается только внутри тела (в области неоднородности).

На этом пути удается доказать теорему о существовании и единственности решений в L_2 нелинейного интегрального уравнения, теорему о существовании и единственности решений обратной краевой задачи, предложить и доказать сходимость численного метода для решения интегрального уравнения и обратной краевой задачи [6–8].

Настоящая статья посвящена разработке численного метода для решения интегрального уравнения и обратной краевой задачи. Применяется метод коллокации [9] с аналитическим суммированием медленно сходящихся рядов в функциях Грина.

Метод коллокации

Рассмотрим вопрос о построении схемы метода коллокации для решения объемного сингулярного интегродифференциального уравнения, к которому сводится краевая задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом теле Q , расположенном в прямоугольном волноводе [6–8]. Пусть в декартовой системе координат $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волноводе расположено объемное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной 3×3 -матрицей-функцией (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ являются ограниченными функциями в области $\bar{Q}$, $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, а также $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$.

Будем формулировать метод не для сингулярного интегрального уравнения, а для интегродифференциального уравнения. Этот подход оказывается эффективным в силу более удобного представления интегралов. Будем предполагать, что тензор диэлектрической проницаемости тела $\hat{\epsilon}(x)$ удовлетворяет условиям:

$\left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)$ обратим в $\bar{Q}$ и $\left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \in L_\infty(Q)$, где $\hat{I}$ – единичный тензор.

Введя обозначения

$$\xi = \left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1}, \quad \mathbf{J} := \left(\frac{\hat{\epsilon}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E},$$

перейдем к следующему уравнению:

$$A\mathbf{J} = \xi \mathbf{J}(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad (1)$$

где $\vec{E}$ – неизвестное электрическое поле; $\mathbf{E}^0$ – известное внешнее электрическое поле (распространяющаяся волна в волноводе); k_0 – волновое число вакуума, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$; ω – круговая частота.

Компоненты тензора Грина $\hat{G}_E(x, y)$ имеют вид [6]:

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (2)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \quad (3)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \quad (4)$$

В этих выражениях $\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}$, при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$.

Запишем G_E^m с выделенной особенностью при $x = y$:

$$G_E^m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} + g^m(x, y), \quad x, y \in P, \quad (5)$$

где функция $g^m \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ [10, с. 132]. Отсюда, и в силу симметрии функций Грина $G_E^m(x, y) = G_E^m(y, x)$ ($m = 1, 2, 3$) имеем

Утверждение 1.2. Тензор Грина $\hat{G}_E$ допускает представление

$$G_E = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|x-y|}}{|x-y|} \hat{I} + \hat{g}(x, y), \quad x, y \in P, \quad (6)$$

где матрица-функция (тензор) $\hat{g} \in C^\infty(\bar{Q} \times \bar{P})$ и $\hat{g} \in C^\infty(\bar{P} \times \bar{Q})$.

Такое представление функции Грина удобно для теоретического исследования задачи дифракции, но непригодно для численных расчетов, так как не содержит алгоритма вычисления $\hat{g}$.

Представим это уравнение в виде системы трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G(x, y) J^l(y) dy - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_l} \text{div}_x \int_Q G(x, y) \vec{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Будем искать компоненты приближенного решения $\vec{J}$ в виде

$$\vec{J}^1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^1 f_k^1(x), \quad \vec{J}^2 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 f_k^2(x), \quad \vec{J}^3 = \sum_{k=1}^N \alpha_k^3 f_k^3(x),$$

где f_k^i – базисные функции.

Ниже проводится построение функций f_k^i . Будем считать, что Q – параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем тело Q на элементарные параллелепипеды (рис. 1):

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\};$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{n}k, x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{n}l, x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{n}m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, n-1$.

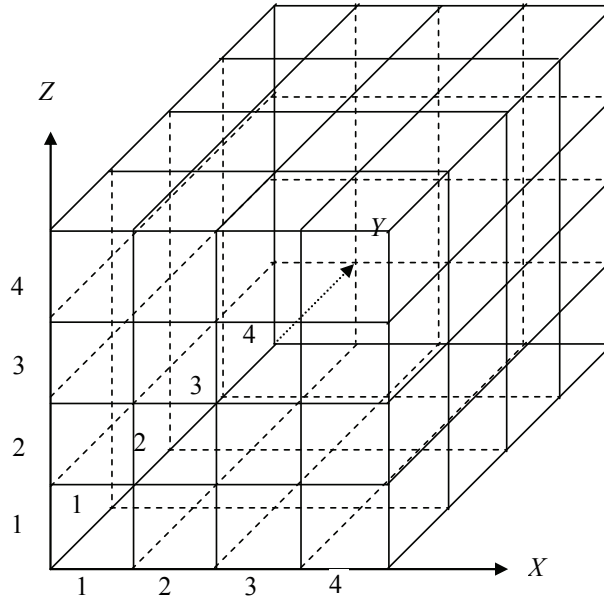


Рис. 1

Будем считать, что шаг по каждой координате постоянен: $h^i := |x_{i,k} - x_{i,k-1}|$. Наряду с обычной нумерацией нам удобно будет ввести трехиндексную нумерацию базисных функций. Определим f_{klm}^i ($i = 1, 2, 3$):

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{klm}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}. \end{cases}$$

Построенное множество базисных функций удовлетворяет необходимому условию аппроксимации в $L_2^3(Q) = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(Q)$.

Расширенную матрицу для нахождения неизвестных коэффициентов $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$ удобно представить в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_0^k(x_i);$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy, \quad (8)$$

где координаты точек коллокации имеют следующий вид:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \quad x_{i1} = (i_1 + 1/2)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 1/2)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 1/2)h_3,$$

$$k, l = 1, 2, 3; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Таким образом, представлены расчетные формулы для матричных коэффициентов метода коллокации для решения сингулярного интегродифференциального уравнения.

Пусть

$$X_1 = \frac{\pi x_1}{a}, \quad X_2 = \frac{\pi x_2}{b}, \quad Y_1 = \frac{\pi y_1}{a},$$

$$Y_2 = \frac{\pi y_2}{b}, \quad H_1 = \frac{\pi h_1}{a}, \quad H_2 = \frac{\pi h_2}{b},$$

тогда компоненты тензора Грина примут вид

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos nX_1 \sin mX_2 \cos nY_1 \sin mY_2; \quad (9)$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin nX_1 \cos mX_2 \sin nY_1 \cos mY_2; \quad (10)$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin nX_1 \sin mX_2 \sin nY_1 \sin mY_2. \quad (11)$$

Введем обозначения для используемых функций:

$$r(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos ny}{n(n^2 + \lambda^2)} = p(x, y; \lambda) + q(x, y; \lambda) \quad (0 \leq x, y \leq \pi);$$

$$p(x, y; \lambda) = \frac{\pi}{4\lambda^2(1 - e^{-2\pi\lambda})} \times$$

$$\times \left(e^{-\lambda(2\pi-x-y)} - e^{-\lambda(x+y)} + \operatorname{sign}(x-y)(e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} - e^{-\lambda|x-y|}) \right);$$

$$q(x, y; \lambda) = \frac{1}{4\lambda^2} (\pi - x - y + \operatorname{sign}(x-y)(\pi - |x-y|));$$

$$q_0(x, y) = \pi - x - y + \operatorname{sign}(x-y)(\pi - |x-y|);$$

$$s(x, y; \lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{4\lambda} \frac{e^{-\lambda|x-y|} + e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} - e^{-\lambda(x+y)} - e^{-\lambda(2\pi-x-y)}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi);$$

$$d(x, y; \lambda) \equiv \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\pi}{4} \frac{\left(e^{-\lambda|x-y|} - e^{-\lambda(2\pi-|x-y|)} \right) \operatorname{sign}(x-y) - e^{-\lambda(x+y)} + e^{-\lambda(2\pi-x-y)}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi).$$

Так как базисные функции равны 1 только внутри элементарного параллелепипеда Π_{klm} , интегралы в интегральном уравнении вычисляются аналитически. Проинтегрировав компоненты тензора Грина по элементарному параллелепипеду, будем иметь:

$$G_I^1 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \cos nX_1 \sin mX_2 (\sin n(i_1 + 1)H_1 - \sin ni_1 H_1) (\cos mi_2 H_2 -$$

$$- \cos m(i_2 + 1)H_2) + \frac{H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{0m}^0(x_3)}{\gamma_{0m}^2} \sin mX_2 (\cos mi_2 H_2 - \cos m(i_2 + 1)H_2);$$

$$G_I^2 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \cos mX_2 (\cos ni_1 H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1) \times$$

$$\times (\sin m(i_2 + 1)H_2 - \sin mi_2 H_2) + \frac{H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n0}^0(x_3)}{\gamma_{n0}^2} \sin nX_1 (\cos ni_1 H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1);$$

$$G_I^3 = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}^0(x_3)}{\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \sin mX_2 \times$$

$$\times (\cos ni_1 H_1 - \cos n(i_1 + 1)H_1) (\cos mi_2 H_2 - \cos m(i_2 + 1)H_2),$$

где

$$f_{nm}^0(x_3) = \begin{cases} \left(\exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3; \\ \left(\exp(-(i_3 h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \left(2 - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } i_3 h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

После суммирования медленно сходящихся рядов (выделения особенности) получим:

$$\begin{aligned}
 G_I^1 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos nX_1 \sin mX_2 \cos ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \\
 & + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{\gamma_{0m}^2 m} \sin mX_2 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} + \\
 & + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nX_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right. \\
 & - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] + \\
 & + \frac{a^2}{\pi^4} [q_0(X_2, i_2 H_2) - q_0(X_2, (i_2 + 1)H_2)] \left[p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) \Big] + \\
 & + \frac{2H_1 b^2}{\pi^4} \left[p\left(X_2, i_2 H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - p\left(X_2, (i_2 + 1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \left. + q\left(X_2, i_2 H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - q\left(X_2, (i_2 + 1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \right] \Big\}; \\
 G_I^2 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos mX_2 \sin nX_1 \cos mi_2^* H_2 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{mH_2}{2} \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{\gamma_{n0}^2 n} \sin nX_1 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos mX_2 \cos mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} [p(X_1, i_1 H_1, \lambda_m) - \right. \\
 & - p(X_1, (i_1 + 1)H_1, \lambda_m)] + \frac{b^2}{\pi^4} [q_0(X_1, i_1 H_1) - q_0(X_1, (i_1 + 1)H_1)] \times \\
 & \times \left[p\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* - X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* - X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + p\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* + X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2 i_2^* + X_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \Big] + \frac{2H_2 a^2}{\pi^4} \left[p\left(X_1, i_1 H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - \right. \\
 & \left. - p\left(X_1, (i_1 + 1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(X_1, i_1 H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - q\left(X_1, (i_1 + 1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \Big\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_I^3 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(x_3)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin nX_1 \sin mX_2 \sin ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \\
& + \chi_{i_3}(x_3) \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nX_1 \sin ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(X_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right. \\
& - p(X_2, (i_2 + 1)H_2, \lambda_n)] + \frac{a^2}{\pi^4} [q_0(X_2, i_2 H_2) - q_0(X_2, (i_2 + 1)H_2)] \times \\
& \times \left[p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
& \left. + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + X_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

где

$$f_{nm}(x_3) = \begin{cases} \left(\exp(-(x_3 - (i_3 + 1)h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 > (i_3 + 1)h_3; \\ \left(\exp(-(i_3 h_3 - x_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } x_3 < i_3 h_3; \\ \left(-\exp(-(x_3 - i_3 h_3)\gamma_{nm}) - \exp(-((i_3 + 1)h_3 - x_3)\gamma_{nm}) \right), & \text{если } i_3 h_3 < x_3 < (i_3 + 1)h_3. \end{cases}$$

Здесь также обозначено

$$i_1^* = i_1 + 0,5, \quad i_2^* = i_2 + 0,5, \quad i_3^* = i_3 + 0,5, \quad j_1^* = j_1 + 0,5, \quad j_2^* = j_2 + 0,5, \quad j_3^* = j_3 + 0,5;$$

$$\chi_{i_3}(x_3) = \begin{cases} 1, & h_3 i_3 < x_3 < h_3 (i_3 + 1), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В точке коллокации значения проинтегрированных компонент тензора Грина будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_*^1 = & \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos nj_1^* H_1 \sin mj_2^* H_2 \cos ni_1^* H_1 \sin mi_2^* H_2 \times \\
& \times \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \frac{2H_1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{\gamma_{0m}^2 m} \sin mj_2^* H_2 \sin mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} + \\
& + \delta_{i_3 j_3} \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nj_1^* H_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} [p(j_2^* H_2, i_2 H_2, \lambda_n) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \lambda_n\right) + \frac{a^2}{\pi^4} \left[q_0(j_2^*H_2, i_2H_2) - q_0\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2\right) \right] \times \\
 & \times \left[p\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* - H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* - H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & + p\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* + H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_1}{2}, H_1i_1^* + H_1j_1^*, \frac{ika}{\pi}\right) \Big] + \\
 & + \frac{2H_1b^2}{\pi^4} \left[p\left(j_2^*H_2, i_2H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - p\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & \left. + q\left(j_2^*H_2, i_2H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) - q\left(j_2^*H_2, (i_2+1)H_2, \frac{ikb}{\pi}\right) \right] \Bigg\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_*^2 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \cos mj_2^*H_2 \sin nj_1^*H_1 \cos mi_2^*H_2 \sin ni_1^*H_1 \times \\
 & \times \sin \frac{mH_2}{2} \sin \frac{nH_1}{2} + \frac{2H_2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{\gamma_{n0}^2 n} \sin nj_1^*H_1 \sin ni_1^*H_1 \sin \frac{nH_1}{2} + \\
 & + \delta_{i_3j_3} \left\{ \frac{8a^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos mj_2^*H_2 \cos mi_2^*H_2 \sin \frac{mH_2}{2} \left[p\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \lambda_m\right) - \right. \right. \\
 & - p\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \lambda_m\right) \Big] + \frac{b^2}{\pi^4} \left[q_0\left(j_1^*H_1, i_1H_1\right) - q_0\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1\right) \right] \times \\
 & \times \left[p\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* - H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* - H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + \right. \\
 & + p\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* + H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) + q\left(\frac{H_2}{2}, H_2i_2^* + H_2j_2^*, \frac{ikb}{\pi}\right) \Big] + \\
 & + \frac{2H_2a^2}{\pi^4} \left[p\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - p\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) + \right. \\
 & \left. + q\left(j_1^*H_1, i_1H_1, \frac{ika}{\pi}\right) - q\left(j_1^*H_1, (i_1+1)H_1, \frac{ika}{\pi}\right) \right] \Bigg\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_*^3 &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3j_3^*)}{nm\gamma_{nm}^2} \sin nj_1^*H_1 \sin mj_2^*H_2 \sin ni_1^*H_1 \sin mi_2^*H_2 \times \\
 & \times \sin \frac{nH_1}{2} \sin \frac{mH_2}{2} + \delta_{i_3j_3} \left\{ \frac{8b^2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nj_1^*H_1 \sin ni_1^*H_1 \sin \frac{nH_1}{2} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[p \left(j_2^* H_2, i_2 H_2, \lambda_n \right) - p \left(j_2^* H_2, (i_2 + 1) H_2, \lambda_n \right) \right] + \\
& + \frac{a^2}{\pi^4} \left[q_0 \left(j_2^* H_2, i_2 H_2 \right) - q_0 \left(j_2^* H_2, (i_2 + 1) H_2 \right) \right] \times \\
& \times \left[p \left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - H_1 j_1^*, \frac{ika}{\pi} \right) + q \left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* - H_1 j_1^*, \frac{ika}{\pi} \right) + \right. \\
& \left. + p \left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + H_1 j_1^*, \frac{ika}{\pi} \right) + q \left(\frac{H_1}{2}, H_1 i_1^* + H_1 j_1^*, \frac{ika}{\pi} \right) \right] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Здесь $\delta_{i_3 j_3}$ – символ Кронекера.

Для вторых производных в точке коллокации имеем:

$$\begin{aligned}
G_{11}^1 &= -\frac{8}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{nf_{nm}(h_3 j_3^*)}{m \gamma_{nm}^2} \cos nj_1^* H_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} \sin mi_2^* H_2 \times \\
& \times \sin mj_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} - \delta_{i_3 j_3} \frac{8a}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin mi_2^* H_2 \sin mj_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} \times \\
& \times \left[d \left(H_1 j_1^*, H_1 (i_1 + 1); \lambda_m \right) - d \left(H_1 j_1^*, H_1 i_1; \lambda_m \right) \right]; \\
G_{22}^2 &= -\frac{8}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mf_{nm}(h_3 j_3^*)}{n \gamma_{nm}^2} \cos mj_2^* H_2 \cos mi_2^* H_2 \sin \frac{mH_1}{2} \sin ni_1^* H_1 \times \\
& - \delta_{i_3 j_3} \frac{8b}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin ni_1^* H_1 \sin nj_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} \times \\
& \times \left[d \left(H_2 j_2^*, H_2 (i_2 + 1); \lambda_n \right) - d \left(H_2 j_2^*, H_2 i_2; \lambda_n \right) \right]; \\
G_{12}^1 &= -\frac{8}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_{nm}(h_3 j_3^*)}{\gamma_{nm}^2} \sin nj_1^* H_1 \cos ni_1^* H_1 \sin \frac{nH_1}{2} \sin mi_2^* H_2 \times \\
& \times \cos mj_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} - \delta_{i_3 j_3} \frac{8a}{\pi^2 b} \sum_{m=1}^{\infty} \sin mi_2^* H_2 \cos mj_2^* H_2 \sin \frac{mH_2}{2} \times \\
& \times \left[s \left(H_1 j_1^*, H_1 (i_1 + 1); \lambda_m \right) - s \left(H_1 j_1^*, H_1 i_1; \lambda_m \right) \right]; \\
G_{21}^2(i_1, i_2, j_1, j_2) &= G_{12}^1(j_1, j_2, i_1, i_2).
\end{aligned}$$

Функции $d(x, y; \lambda)$ и $s(x, y; \lambda)$ были определены выше. После суммирования медленно сходящихся рядов получаем экспоненциально сходящиеся ряды.

Результаты расчетов решения объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов решения объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации.

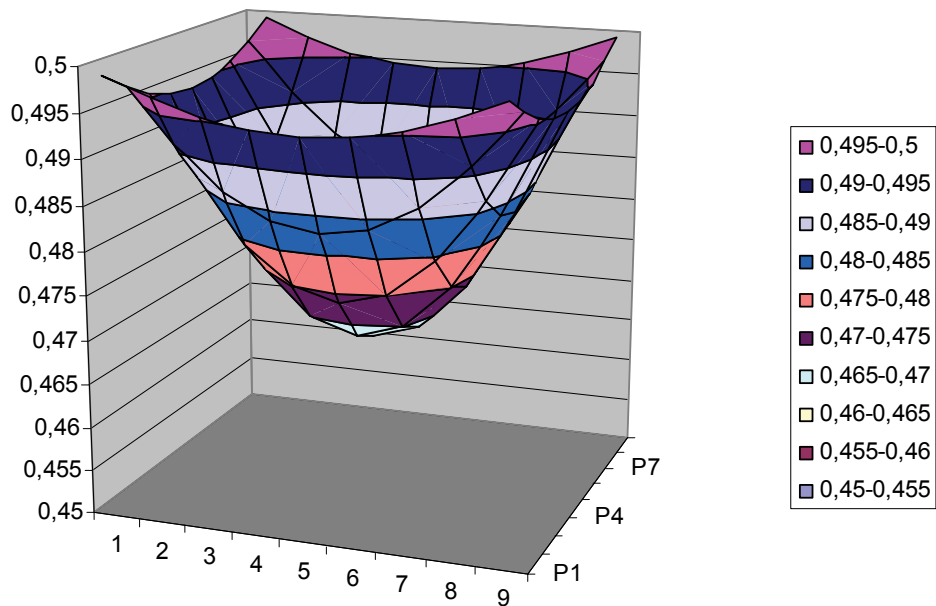


Рис. 1 Модуль компоненты $|E_3|$ в сечении $x_3 = 4,1$ (время на вычисление коэффициентов матрицы при $m = 9$: 2 ч 58 мин 56 с на 100 процессорах. Время на решение СЛАУ: 24 с на восьми процессорах)

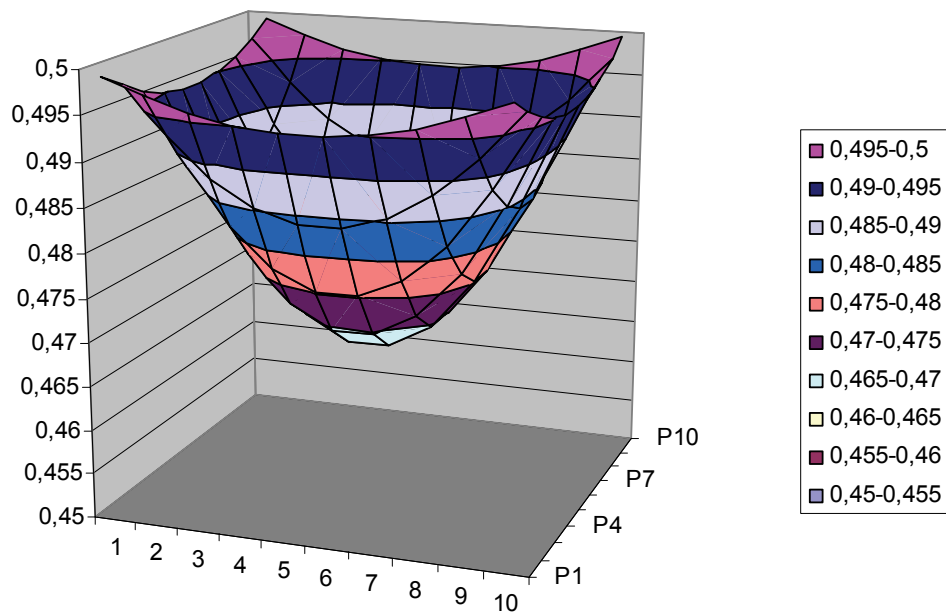


Рис. 2 Модуль компоненты $|E_3|$ в сечении $x_3 = 0,6$ (время на вычисление коэффициентов матрицы при $m = 10$: 5 ч 22 мин 32 с на 100 процессорах. Время на решение СЛАУ: 30 с на восьми процессорах)

Расчет проводился при значениях параметров: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $c_2 = 1$, $k_0 = 1$. Суммировалось 500 членов во всех рядах. Выбиралось $E^0(x) = (0, 0, 1)$. Расчеты показывают высокую эффективность предложенного метода коллокации для решения объемного сингулярного интегрального уравнения и необходимость применения суперкомпьютеров. Расчеты выполнялись на суперкомпьютере СКИФ-ГРИД полигона Т-60 «Чебышев» в НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова.

Результаты расчетов для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериала

Будем рассматривать обратную краевую задачу для определения эффективной диэлектрической проницаемости образца наноматериала, расположенного в волноводе. Рассмотрим изотропный случай и будем считать, что $\bar{\epsilon}(x) = \epsilon$, где ϵ – неизвестная константа (эффективная диэлектрическая проницаемость) образца. Предположим, что $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода, потому что $\text{Im} \gamma_1^{(2)} = 0$, $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \pi^2/a^2} > 0$ и $\text{Im} \gamma_p^{(j)} > 0$ для всех p, j за исключением $p = 1$ и $j = 2$. Мы также предполагаем, что

$$\mathbf{E}^0(x) = e_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3}.$$

Здесь $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда распространяющейся волны. Мы предполагаем, что коэффициент $Q_1^{(+)}$ известен из эксперимента. Таким образом, имеем

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 = \frac{C}{(\mathbf{E}, \mathbf{f})}, \quad (12)$$

где

$$C = \frac{i \pi \omega \mu_0 b \gamma_{10} (Q_1^{(+)} - A^{(+)})}{k_0^2}; \quad (13)$$

$$\mathbf{f} = e_2 \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} y_3}, \quad (14)$$

скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{f}) = \int_Q \mathbf{E}(y) \overline{\mathbf{f}(y)} dy. \quad (15)$$

Расчет производим по итерационной формуле:

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n - \frac{1}{\tilde{A}^{(+)} \|\mathbf{f}\|^2} \{ (\mathbf{E}_n, \mathbf{f}) (\mathbf{E}_n - \mathbf{E}^0) - C (A_0 \mathbf{E}_n) \}. \quad (16)$$

В качестве начального приближения выбираем $E_0 = E^0$. На рис. 3–6 представлены результаты расчетов эффективной диэлектрической проницаемости в зависимости от величины измеренного коэффициента прохождения для различных образцов, а также анализ сходимости итерационного процесса.

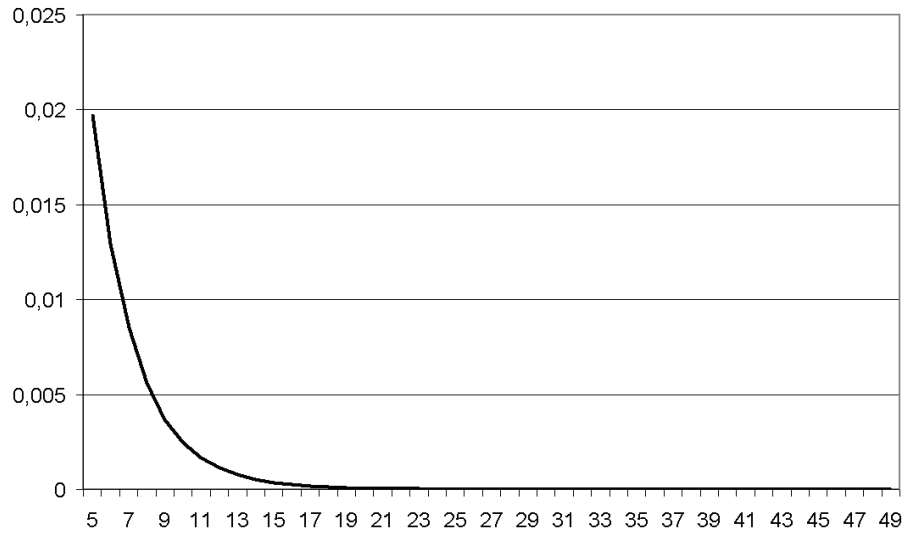


Рис. 3 Зависимость погрешности расчета электрического поля $\Delta = \max |E_{n+1} - E_n|$ от количества итераций n в формуле (16) при значениях параметров: $A^{(+)} = 1$, $Q_1^{(+)} = 0,99$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $c_2 = 2$, $k_0 = 2,5$

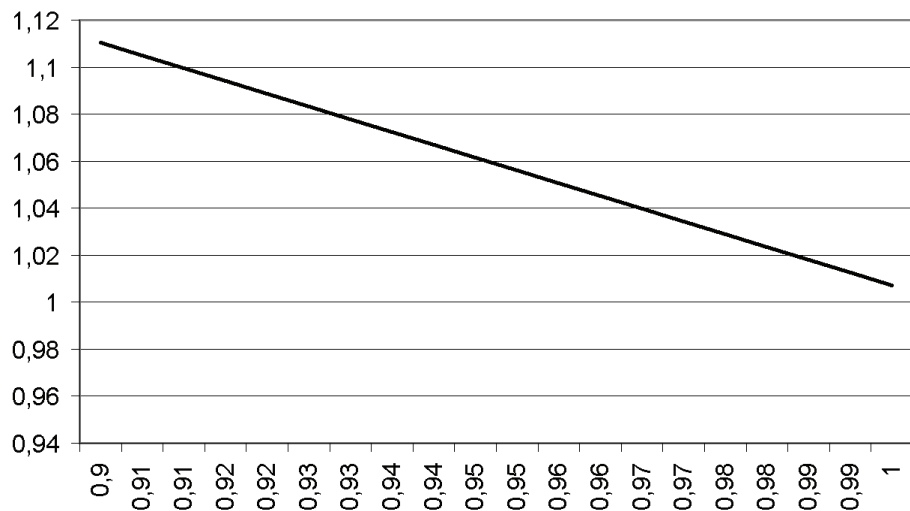


Рис. 4 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости

$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ от величины измеренного коэффициента прохождения $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров: $A^{(+)} = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = 0,25$, $c_1 = 0,5$, $a_2 = 1$, $b_2 = 0,75$, $c_2 = 1,5$, $k_0 = 2,5$

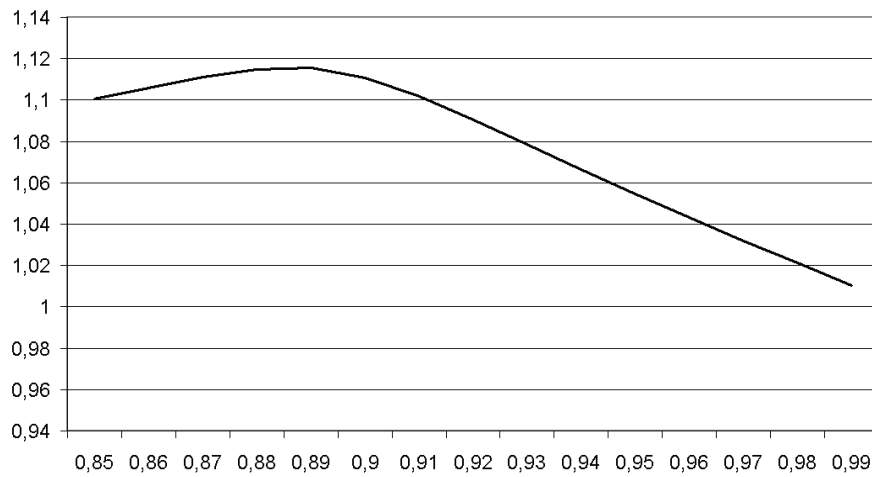


Рис. 5 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ от величины измеренного коэффициента прохождения $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров: $A^{(+)} = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $a_1 = 0,5$,
 $b_1 = 0,25$, $c_1 = 0,5$, $a_2 = 1,5$, $b_2 = 0,75$, $c_2 = 1,5$, $k_0 = 2,5$

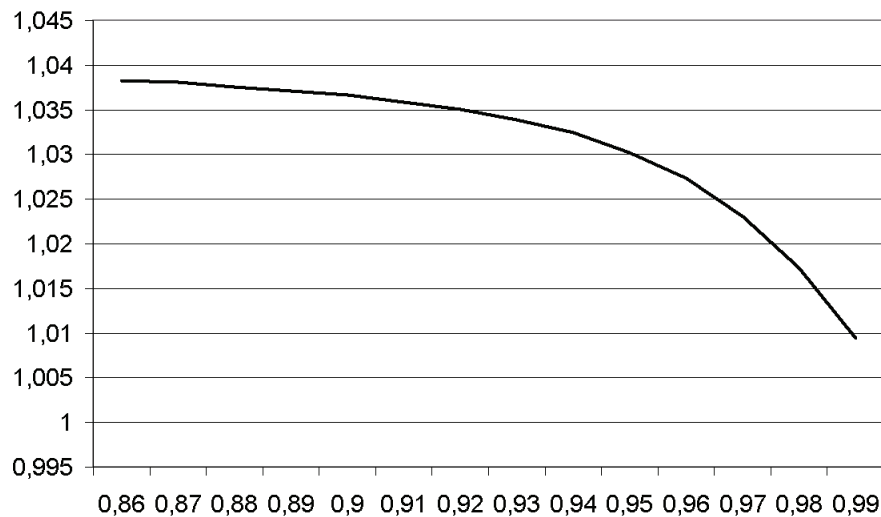


Рис. 6 Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ от величины измеренного коэффициента прохождения $Q_1^{(+)}$

при значениях параметров: $A^{(+)} = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $a_1 = 0$,
 $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $c_2 = 2$, $k_0 = 2,5$

Результаты, представленные на рис. 3, показывают высокую скорость сходимости итерационного процесса. Графики, представленные на рис. 4–6, иллюстрируют возможность расчета относительной эффективной диэлектрической проницаемости материала при различном положении и размерах образца внутри волновода.

Список литературы

1. **Shestopalov, Yu. V.** Volume Singular Integral Equations Method for Determination of Effective Permittivity of Meta- and Nanomaterials / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2008). – Cambridge, USA, 2008. – P. 291–292.
2. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, October 22–25. – Antalya, Turkey, 2008.
3. **Smirnov, Yu. G.** Method of Volume Singular Integral Equation for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide / Yu. G. Smirnov // Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS 2009). – M., 2009.
4. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998.
5. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
6. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 2–10.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
8. **Smirnov, Yu. G.** Inverse Boundary Value Problem for Determination of Permittivity of Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / Yu. G. Smirnov // IEEE Transactions on Fundamentals and Materials. – 2009. – V. 129. – № 10. – P. 675–680.
9. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
10. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996.

Медведик Михаил Юрьевич

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yuryevich

Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

Smirnov Yuri Gennadyevich

Doctor of physico-mathematical sciences,
professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University

УДК 517.9

Медведик, М. Ю.

Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокации / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 54–69.